



TITLE:

# 保型形式の次元へのユニポテナント 共役類の寄与の消滅(保型形式とそ の周辺)

AUTHOR(S):

伊吹山, 知義

---

CITATION:

伊吹山, 知義. 保型形式の次元へのユニポテナント共役類の寄与の消滅(保型形式とその周辺). 数理解析研究所講究録 1987, 617: 160-175

ISSUE DATE:

1987-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99841>

RIGHT:

# 保型形式の次元へのユニポテント共役類の寄与の消滅

九大数養 伊吹山 知義 (Tomoyoshi Ibukiyama)

一般の  $n$  について,  $Sp(n, \mathbb{R})$  とその compact 実形  $Sp(n)$  の適当な「離散群」についての保型形式を比較することを目標に, 次元比較については, central unipotent ではうまくゆくことを示すのが本稿の目的である。

## §1. 問題の設定と主定理

まず, 我々が考えている「離散群」について解説しよう。  
 $Sp(n, \mathbb{R})$  については次のようなものを考える。素数  $p$  を1つ固定する。

$$U_p = Sp(n, \mathbb{Z}) \cap \left\{ \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} * & & & * \\ p* & \ddots & & \\ p* & & p* & * \end{matrix}}^n & \overbrace{\begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix}}^n \\ \hline p* & \overbrace{\begin{matrix} * & p* & p* \\ & \ddots & p* \\ & & * \end{matrix}}^n \end{pmatrix} \right\}$$

とおく。但し  $*$  は任意の整数を (成分ごとに独立に) 動かす

する。 $U_\phi$  は  $Sp(n, \mathbb{Q})$  の岩堀部分群と呼ばれる。さて、 $U_\phi$  に属する weight 長  $\alpha$  の  $\mathfrak{g}$ -ゲル尖長形式を問題にしたいのであるが、 $n=1$  の時と同様、new form のみを考えるのが重要である。このためには、 $Sp(n, \mathbb{Q}) \supsetneq U \supset U_\phi$  となるようなすべての群  $U$  が必要となる。Bruhat-Tits 理論によればこのような  $U$  の全体は  $Sp(n, \mathbb{Q})$  の affine Weyl 群の Coxeter 部分群と一対一に対応している。言いかえると、 $Sp(n, \mathbb{Q})$  の拡張された Dynkin 図形



の  $n+1$  個の頂点の集合を  $S_{\text{aff}}$  とすれば、 $S_{\text{aff}}$  の真部分集合と一対一に対応している。 $\theta \subsetneq S_{\text{aff}}$  に対応する  $U$  を  $U_\theta$  と書くことにする。 $\theta = \phi$  ならば  $U_\theta$  は岩堀部分群である。

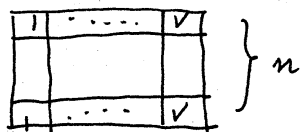
$U_\theta$  に属する weight 長  $\alpha$  の  $\mathfrak{g}$ -ゲル尖長形式の空間を  $S_R(U_\theta)$  と書くことにする。

$Sp(n)$  については本稿では直接必要としないので概略を述べるにとどめる。 $p$  を前に固定した素数とし、 $B$  を、判別式が  $p$  の  $\mathbb{Q}$  上の定符号  $4$  元数環とする。左  $B$  ベクトル空間  $B^n$  上には、正定値  $B$ -エルミート計量が基底のとりかえを除いて、一意に存在する。この計量に関する相似変換 (similitudes) のなす群を  $G$  とし、 $G_A$  を  $G$  の  $A$ -アデール化、 $G_v$  を  $G_A$  の  $v$  成分とする。 $(v \leq \infty)$   $G_p$  の minimal parahoric subgroup

を1つ選んで  $U'_{p,\phi}$  と書く。前と同様、 $U'_{p,\phi}$  を含む  $G_p$  の部分群は、 $G_p$  の拡張 Dynkin 図形の頂点の集合  $S'_{aff}$  の部分集合と1対1に対応する。 $\theta \in S'_{aff}$  について、対応する群を  $U'_{p,\theta}$  と書き、 $G_A$  の部分群  $U'_\theta$  を

$$U'_\theta = G_\infty U'_{p,\theta} \prod_{i \neq p} U'_i$$

と定義する。但し、 $U'_i = G_i \cap GL_n(\mathcal{O}_i)$ 、 $\mathcal{O}$  は  $B$  の極大整数環とした。 $\mathcal{M}_V(U'_\theta)$  で、 $U'_\theta$  に属し、かつ weight (i.e.  $G_\infty$  の表現) が Young 図形



であるような  $G_A$  上の保型形式の空間をあらわす。

予想  $([2], [3])$

$$(*) \quad \sum_{\theta \in S'_{aff}} (-1)^{\#(\theta)} \dim S_k(U_\theta) = \sum_{\theta \in S'_{aff}} (-1)^{\#(\theta)} \dim \mathcal{M}_{k-n-1}(U'_\theta)$$

for  $k \geq n+2$

この予想は、 $n=1$  では Eichler による定理であり、 $n=2$  では [1] で証明された。我々の目標はこれを  $n \geq 3$  に拡張

することである。ところで、周知のように、次元公式は群の共役類に関する適当な data の和で表わされている。 $n=2$  では、これらの data を完全に explicit に計算してしまふことにより比較を行、た ([1])。しかし  $n$  が一般では explicit な計算は当面難しそうである。むしろ次元の計算と次元の比較は別の問題であるとの観点から、次元の比較についての一般論を追求する方が望ましいように思われる。Langlands は跡公式の比較について次のような哲学を述べている。まず

$Sp(n, \mathbb{R})$  と  $Sp(n)$  は共に  $Sp(n, \mathbb{C})$  の実形である。 $Sp(n, \mathbb{C})$  の元  $\gamma$  の共役類  $C$  を 1 つ固定し、 $Sp(n, \mathbb{R})$  共役類で  $C$  に含まれるもの全体を  $C_1$ 、 $Sp(n)$  共役類について同様のものを  $C_2$  と書く。  $C_1, C_2$  を *stable conjugacy class* と呼ぶことにする。この時、大雑把に言、て  $C_1$  と  $C_2$  の両方の群での跡公式への寄与は等しいであろうというのである。特に、 $Sp(n)$  の元はすべて半単純であるから、 $Sp(n, \mathbb{R})$  の半単純でない元、たとえばユニポテント元  $\gamma$  の左辺への寄与は 0 である。この部分を調べるには  $\gamma$  の左辺だけ考えればよい。もう少し正確に述べるために、Godement の公式を復習する。

$\mathfrak{h}_n$  を  $n$  次のヒール上半空間とし、 $U \subset Sp(n, \mathbb{R})$  を  $\text{vol}(U \setminus \mathfrak{h}_n) < +\infty$  なる離散部分群とすると、

$R \geq 2n+1$  での次元公式がなりたつ (Godement)。

$$\dim S_k(U) = a_n(k) \int_{U \setminus \mathbb{H}_n} \sum_{r \in U} H_f(k; z) dz$$

$$\text{但し, } dz = (\det Y)^{-n-1} \prod_{i \leq j} dx_{ij} dy_{ij},$$

$$H_f(k; z) = \det(Cz + D)^{-k} \det\left(\frac{\sigma \cdot z - \bar{z}}{2\sqrt{-1}}\right)^{-k} (\det Y)^k,$$

$$(\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix})$$

$a_n(k)$  は、 $n$  と  $k$  のみによる定数で、 $\Gamma$  関数で具体的にあらわされる。

次に、 $Sp(n, \mathbb{Q})$  の元について、次の用語を導入する。

定義  $g \in Sp(n, \mathbb{Q})$  とする。適当な  $h \in Sp(n, \mathbb{Q})$  と適当な対称行列  $X = {}^t X \in M_n(\mathbb{Q})$  について

$$h^{-1} g h = \begin{pmatrix} 1_n & X \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \quad (X \neq 0)$$

となるとき、 $g$  を central unipotent と言う。言いかえれば、 $g$  が  $Sp(n, \mathbb{Q})$  のある maximal parabolic subgr. の unipotent radical の center に属するとき  $g$  を central unipotent と言うのである。

$S_p(n, \mathbb{Q})$  の central unipotent elements の全体 の 集合を  $\mathcal{C}$  とし、各  $\theta \in S_{\text{aff}}$  に対し

$$\Pi(\theta) = U_\theta \cap \mathcal{C}$$

とおく。また、

$$I(k, \theta) = a_n(k) \int_{U_\theta \setminus \mathbb{P}_n} \sum_{\gamma \in \Pi(\theta)} H_\gamma(k; z) dz$$

とおく。

### 主定理

任意の  $n \geq 1$ ,  $k \geq 2n+1$  及び  $\theta \in S_{\text{aff}}$  に対し、  
 $I(k, \theta)$  は収束し、各  $(n, k)$  の組に対し、

$$\sum_{\theta \in S_{\text{aff}}} (-1)^{\#(\theta)} I(k, \theta) = 0$$

となる。すなわち、central unipotent elements の  $(*)$  の左辺への寄与は消滅する。

次に何故このみを問題にするのかを述べ、系を1つ述べる。  
 上の主定理では、 $I_n(k, \theta)$  自身は通常  $0$  ではなく、(すなわち各  $\dim S_k(U_\theta)$  への central unipotent の寄与は  $0$  ではなく) 交代和をと、2 はじめ  $2 \cdot 0$  になるという真がポイントである。

しかし、 $\mathbb{C}$  の元以外のユニポテント元や、"hyperbolic" な元については、多くの人によ、2 次のことが予想されている。

予想  $U$  の "hyperbolic" な元と central でない unipotent 元  
 $\eta$   $\dim S_{\mathbb{R}}(U)$  1 の寄与は消滅する。

この予想を仮定すれば、我々の主定理はもう少しすっきりした形の系を導く。  $N \geq 3$  なる自然数  $N$  で  $p \nmid N$  なるものをとる。 (\*) の両辺を "level  $N$ " で考えよう。すなわち、

$$\Gamma_p(N) = \left\{ g \in S_p(n, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) : g \equiv 1_{2n} \pmod{N} \right\}$$

とおき、  $U_{\theta}(N) = U_{\theta} \cap \Gamma_p(N)$  とする。また  $U'_{\theta} \subset G_A$  の各成分を  $g \mid N$  については "level  $N$ " の主合同部分群におきかえたものを  $U'_{\theta}(N)$  とする。このとき、

系. 上の予想のもとで

$$\sum_{\theta \in S_{\text{aff}}} (-1)^{\#(\theta)} \dim S_{\mathbb{R}}(U_{\theta}(N)) = \sum_{\theta \in S'_{\text{aff}}} (-1)^{\#(\theta)} \dim \mathcal{M}_{\mathbb{R}-n-1}(U'_{\theta}(N))$$

である。



ここで ( $p$  と無関係な) level をつけた理由は、楕円元の寄与を考えないですむからである。また、単位元の寄与は、主定理とは別種の計算で、一致することがわかっている ([3])。

次節以下で証明の概要を述べる。証明は  $I_n(k, \theta)$  の収束と  $I_n(k, \theta)$  が何によ、2 決まるかを述べる「解析的」部分と、交代和の消滅を述べる「群論的」部分に分かれる。

## §2. 解析的公式

$Sp(n, \mathbb{Z})$  ないし主合同部分群については、central unip. の寄与を  $\text{core}$  のゼータ函数の特殊値で表わすという Shintani [4] の公式が存在する。この公式を我々の  $U_\theta$  の場合に書き変えることがまず必要になる。証明の構造は大部分同じであるが、 $U_\theta$  は  $\text{cuop}$  が複雑であるので、いくつかの点で修正が必要であった。ここでは結果のみ述べる。 $U \subset Sp(n, \mathbb{Q})$  を離散群とする。 $1 \leq r \leq n$  について  $Sp(n, \mathbb{Q})$  の maximal parabolic subgroup  $G_{n,r}$  を

$$G_{n,r} = \left\{ \begin{pmatrix} \overbrace{A_{11}}^r & \overbrace{A_{12}}^{n-r} & \overbrace{B_{11}}^r & \overbrace{B_{12}}^{n-r} \\ 0 & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ \hline 0 & 0 & D_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Q}) \right\}$$

と定義する。これは  $(n-r)(n-r+1)/2$  次元の  $\text{cuop}$  と対応する。 $\text{cuop}$  ごとにユニポテント元をわけけるために、

$$Sp(n, \mathbb{Q}) = \bigsqcup_i U w_i G_{n,r} \text{ (disjoint)}$$

と double coset 分解する。

$$S_r = \left\{ \left( \begin{array}{cc|cc} 1_r & 0 & x & 0 \\ 0 & 1_{n-r} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-r} \end{array} \right) ; x = {}^t x \in M_r(\mathbb{Q}) \right\}$$

とおく。

$$S'_r = \{ g \in S_r : \det x \neq 0 \} \text{ とする。}$$

$$\Pi_r = \{ \sigma \in U : g^{-1} \sigma g \in S'_r \text{ for some } g \in Sp(n, \mathbb{Q}) \}.$$

$$\Pi_{r,i} = \{ \sigma \in U : \sigma_0^{-1} \sigma \sigma_0 \in U \cap w_i S'_r w_i^{-1} \text{ for some } \sigma_0 \in U \}$$

とする。  $U$  の central unipotent elements は  $\Pi_r$  ( $r=1, \dots, n$ ) の disjoint union であり、各  $\Pi_r$  は  $\Pi_{r,i}$  の disjoint union であることが簡単な計算により示される。  $\dim S_{\mathbb{R}}(U) \wedge$  central unipotent の寄与を細分して、

$$I_{r,i} = a_n(\mathbb{R}) \int_{U \setminus H_n} \sum_{\sigma \in \Pi_{r,i}} H_r(\mathbb{R}; z) dz$$

とおこう。

公式  $U$  が十分よい群とする。このとき、 $I_{r,i}$  は  $k \geq 2n+1$  で収束して、しかも  $n, k, r$  及び、群  $w_i^{-1} U w_i \cap G_{n,r}$  のみによる。すなわち、 $U$  が異、ても  $w_i^{-1} U w_i \cap G_{n,r}$  が一致する限りは  $I_{r,i}$  は一致する。

ここで「十分よい群」というのは、 $U$  から決まる何種類かの離散群の Levi 分解がその離散群内で実現できるという条件なのだが、ここでは詳しくは述べない。 $U = U_\theta$  ならばこの条件は満足している。また、公式をもっと具体的な volume や積分、ないし cone の zeta 函数、特殊値で書くことができるが、記号がかなり複雑になるので、紙数の関係でここでは割合する。我々の目的のためには、上の事実だけで十分だからである。なお Shintani [4] では  $k \geq 2n+3$  と仮定されているが、その証明の評価をよくみると  $k \geq 2n+1$  でよいことがわかる。

### §3. 群論

前述の公式によれば、主定理は次のような群論的な定理に帰着する。 $1 \leq r \leq n$  なる  $r$  を固定し、各  $\theta \in S_{\text{off}}$  に対し  $d(\theta) = \#(U_\theta \backslash Sp(n, \mathbb{Q}) / G_{n,r})$  とおく。

$$\Lambda = \{(\theta, i) ; \theta \in S_{\text{aff}}, 1 \leq i \leq d(\theta)\} \quad \text{とかく。}$$

### 定理1

$U_\theta \backslash Sp(n, \mathbb{Q}) / G_{n,r}$  ( $\theta \in S_{\text{aff}}$ ) の代表元  
 $\{W_{i,\theta} : i=1, \dots, d(\theta)\}$  を (各  $\theta \in S_{\text{aff}}$  に対して一意に)  
 適当にとれば,  $\Lambda$  の次のような disjoint union への  
 分解が存在する。

$$\Lambda = \coprod_{\alpha} \Lambda_{\alpha} \quad (\text{disjoint})$$

$$\Lambda_{\alpha} = \{(\theta, i), (\theta', j)\} \text{ で}$$

$$\#(\theta) = \#(\theta') + 1 \quad \text{かつ}$$

$$W_{i,\theta}^{-1} U_\theta W_{i,\theta} \cap G_{n,r} = W_{j,\theta'}^{-1} U_{\theta'} W_{j,\theta'} \cap G_{n,r}$$

この定理は純粹の群論であるのである程度代数群の一般論  
 が適用できる。逆に言えば、代数群の一定理とみなしても、  
 独自の面白さがあると思う。この定理を証明するためには、

cuspidal 代表  $w$  (i.e.  $U_\theta \backslash Sp(n, \mathbb{Q}) / G_{n,r}$  の代表) を具体的にとり  
 $w^{-1} U_\theta w \cap G_{n,r}$  についての情報を得ることが必要になる。

もし、 $U_\theta \subset Sp(n, \mathbb{Z})$  ならば、 $U_\theta \backslash Sp(n, \mathbb{Q}) / G_{n,r}$  は、

$Sp(n, \mathbb{Q})$  の (affine でない) Weyl 群  $W$  の、適当な2つ  
 の Coxeter subgroup  $W_\theta$  ( $\theta$  のみによる) と  $W_r$  ( $r$  のみによる)

による double coset の集合  $W_\theta \backslash W / W_r$  と bijective になる。 $U_\theta \notin Sp(n, \mathbb{Z})$  の時も、 $W_\theta$  として Coxeter subgroup ではない  $W$  の部分群をとれば同様のことがなりたつが、これは少々扱いにくい。しかしいずれにしても  $U_\theta \backslash Sp(n, \mathbb{Q}) / G_{n,r}$  の代表は  $W$  の元 (つまり  $Sp(n, \mathbb{Q})$  の max. split torus の normalizer の元) から選ぶことができる。以下でこれを具体的に記述しておく。

$$T = \left\{ t = \begin{pmatrix} t_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & t_n & \\ \hline & & & t_1^{-1} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & t_n \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Q}) ; \begin{matrix} t_i \in \mathbb{Q} \\ i=1 \sim n \end{matrix} \right\}$$

とおき、 $T$  の character gp  $X^*(T)$  の元  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  を、

$\lambda_i(t) = t_i$  で定義する。 $W$  は、 $2n$  個の元からなる集合  $\{\pm \lambda_i; i=1 \sim n\}$  上に忠実に作用し、この作用で、

$$w(\pm \lambda_i) = \pm \varepsilon_i \lambda_{\sigma(i)} \quad \begin{matrix} (\text{複号同順}, \sigma \in S_n) \\ (n \times 2 \text{ 行列群}) \end{matrix}$$

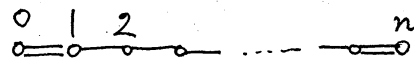
$$\varepsilon_i \in \{\pm 1\}, i=1, \dots, n$$

なる形の置換全体と同一視される。前述の  $W_r$  は、この置換のうちで  $\sigma(i) \in \{1, \dots, r\}$  for all  $i=1 \sim r$  となる形の  $\sigma$  の全体と対応している。よ、 $W / W_r$  の 1 つの coset には、集合  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  の image は同じであり、

$$W / W_r \cong \left\{ \{\varepsilon_1 \lambda_{i_1}, \varepsilon_2 \lambda_{i_2}, \dots, \varepsilon_r \lambda_{i_r}\}; \begin{matrix} \varepsilon_i = \pm 1, i=1 \sim r \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n \end{matrix} \right\}$$

(bijective)

となる。  $W/W_r$  の元を次のような Dynkin 図形 上の「絵」で表わす。 Dynkin 図形 の頂点に



と番号をつけ、  $1 \sim n$  番目の頂点に十または一符号を全体で  $r$  個つける。(0番目には何もつけない。) 符号のついた番号を  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ , それぞれの符号を  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$  ( $= \pm 1$ ) とするとき、この絵を  $\{\varepsilon_1 \lambda_1, \dots, \varepsilon_r \lambda_r\}$  に対応する  $W/W_r$  の元と対応させる。

(例)  $n=2, r=1$  ならば

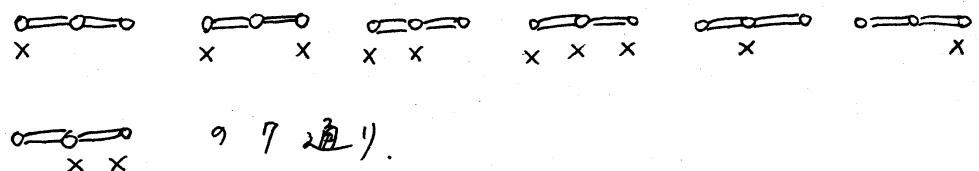


の 4 通りある。

また、  $W/W_r$  の各元について、  $W$  の代表元を 1 つずつか、  $\varepsilon$  に指定しておく。

次に  $\theta \subseteq S_{\text{aff}}$  を考へる。  $\theta$  を、 Dynkin 図形の頂点のうち  $\theta$  に含まれないものの下に  $\times$  をつけることによりあらわす。

(例)  $n=2$  では



の 7 通り。

$S_{\text{aff}}$  の連続した頂点の集合  $\{t, t+1, \dots, t+s\}$  ( $t \geq 1$ ) で  $t=1$  または  $t=s$  が  $\times$  であり、かつ  $t+s$  が  $\times$  または  $n$  である

しかも  $t+n$  以外は皆  $x$  がないとき「ブロック」と呼ぶことにする。但し  $s_{att}$  は  $\{0, 1, \dots, n\}$  と同一視した。以上の準備のもとで

### 定理 2

各  $r$  と  $\theta \in s_{att}$  について  $U_0 \setminus S_p(n, \mathbb{Q}) / \Gamma_{n, r}$  の代表は、次の条件を満たす  $r$  個の符号の絵と 1 対 1 に対応する。

(1) 符号に  $+$  が 1 つでもあるときは、各ブロック

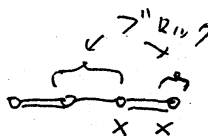
$\{t, t+1, \dots, \infty\}$  で  $\{t, \dots, t+t_1\}$  で符号が  $+$ ,  $\{t+t_1+1, \dots, t+t_2\}$  で符号が  $-$ ,  $\{t+t_2+1, \dots, \infty\}$  で符号なしとなる、という。

(2) 符号がすべてマイナスの時は、各ブロックで

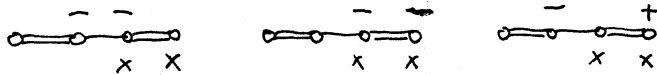
$\{t, t+1, \dots, t+t_1\}$  は符号なし,  $\{t+t_1+1, \dots, \infty\}$  は符号が  $-$  となる。

(3)  $\theta \neq 0$  ならば  $1$  を含むブロックの符号は  $-$  か  $\emptyset$  のみ

(4)  $\theta \neq n$  ならば  $n$  を含むブロックの符号は  $+$  か  $\emptyset$  のみ

(例.)  $n=3, r=2, \theta=\{0, 1\}$  なら  である。

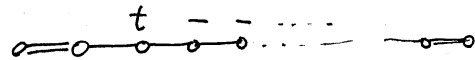
cusp の代表は



で与えられる。

この定理2から定理1を導くには、 $W/W_r$ の元、すなわち「絵」を固定して、 $\theta$ を動かせばよい。ここでは何と何とを比較して  $\text{pair } \Lambda_r$  を作るかのみを述べよう。

- ① 絵の符号がマイナスのみとする。



一々のうちで番号が最小のもを  $t+1$  とする。この絵が  $U_\theta$  の cusp の (定理2における) 代表になるとする。 $\theta \ni t$  または  $\theta \not\ni t$  に応じて  $\theta' = \theta - \{t\}$  または  $\theta' = \theta \cup \{t\}$  とすると、上の絵は  $U_{\theta'}$  の cusp の代表でもある。この2つが定理1の  $\text{pair}$  をなす。

- ② 絵の符号にプラスが含まれるとき、一々のうちで最大の番号を  $t$  とする。この絵が  $U_\theta$  の cusp の代表なら、 $\theta'$  を①と同様に定義するとき、 $U_{\theta'}$  の cusp の代表でもある。この2つを  $\text{pair}$  にすればよい。

例 なり、次の  $\text{pair}$  ができる。



以上のすべてを任意の reductive な代数群に拡張できるのではないかと考えている。主要項については [3] を参照。



## Reference (引用したもののみにとどめた)

- [1] Hashimoto-Ibukiyama, On relations of dimensions of automorphic forms of  $Sp(2, \mathbb{R})$  and its compact twist  $Sp(2) (II)$ , Advanced Studies in pure Math. vol. 7 (1985)
- [2] Ibukiyama, On symplectic Euler factors of genus two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Vol. 30 No. 3 (1984)
- [3] Ibukiyama, On automorphic forms of  $Sp(2, \mathbb{R})$  and its compact form  $Sp(2)$ , Semi. Théorie nombres. Paris (Birkhäuser 1984)
- [4] T. Shintani, On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Vol. 22 No. 1 (1975), 25 - 65.